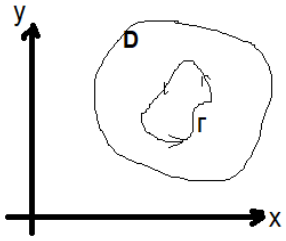
التكامل العقدي

• نظرية كوشي الأولى:

إذا كان التابع f(z) تابعاً تحليلياً ومعرفاً على منطقة وحيدة الاتصال D تحوي المنحني المنتظم المغلق Γ فإن تكامل التابع f(z) على أي منحني بسيط ومغلق Γ يقع بأكمله في D يساوي الصفر، أي:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$



مثال: من أجل أي منحني مغلق Γ فإن:

$$\int_{\Gamma} z^n dz = 0 \ , \qquad (n = 0,1,2,..)$$

$$\int_{\Gamma} e^z dz = 0 \quad , \quad \int_{\Gamma} \cos z \, dz = 0$$

وذلك لأن التوابع $\cos z$, e^z , z^n توابع صحيحة ومشتقاتها مستمرة في أي نقطة من المستوي العقدي.

مثال(1): احسب التكامل:

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{ch^2 z + sh^2 z}{(z+3i)(z^2+16)} dz \quad ; \quad \Gamma: |z| = 2$$

نلاحظ أن هناك نقاط شاذة تعدم المقام وهي:

$$z = -3i \quad , \qquad z = \pm 4i$$

إن التابع المكامل تحليلي على المنحني $\Gamma: |z| = 2$ لأن النقاط الشاذة تقع خارج المنحني Γ بالتالي حسب صيغة كوشي الأولى فإن هذا التكامل يساوي الصفر:

$$I = 0$$

• نظرية كوشي التكاملية:

إذا كان التابع f(z) تابعاً تحليلياً ضمن وعلى محيط منحني مغلق Γ. وإذا كانت z_o أي نقطة تقع ضمن Γ عندئذٍ يكون:

$$f(z_o)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_o}dz \quad \Rightarrow \int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_o}dz=2i\pi f(z_o)$$

مثال(2): احسب التكامل:

$$\int_{C}\frac{e^z}{z-2}dz$$

وذلك في الحالتين: $C:|z|=4$, $C:|z|=1$

الحل:

التابع يملك نقطة شاذة واحدة $z=2$

1) من أجل الدائرة الأولـى $C:|z|=1$:

التابع $\frac{e^z}{z-2}$ تحليلي داخل وعلى محيط الدائرة C وبحسب نظرية كوشي نجد:

$$\int_{C}\frac{e^z}{z-2}dz=\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z-2}dz=0$$

2) من أجل الدائرة الثانية $C:|z|=4$:

فإن التابع $\frac{e^z}{z-2}$ غير تحليلي في النقطة $z=2$ الواقعة داخل الدائرة C بالتالي لا يمكن تطبيق نظرية كوشي الأولى، وعليه نطبق نظرية كوشي التكاملية:

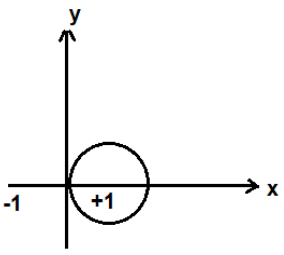
نفرض $f(z)=e^z$ والتابع $f(z)$ تحليلي في كل نقاط المستوي العقدي أي أنه تحليلي داخل وعلى C بالتالي:

$$\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_o}dz=2i\pi f(z_o) \Rightarrow \int_{|z|=4}\frac{e^z}{z-2}dz=2i\pi e^2$$

مثال(3): احسب التكامل:

$$I=\int_{\Gamma}\frac{z^2+1}{z^2-1}dz$$

حيث Γ دائرة مركزها z=1 ونصف قطرها 1:



$$I=\int_{\Gamma}\frac{z^2+1}{(z-1)(z+1)}dz$$

التابع يملك نقطتان شاذتان الأولى $z=1$ واقعة داخل المنحني والثانية $z=-1$ خارج المنحني،

$$I=\int_{\Gamma}\frac{\frac{z^2+1}{(z+1)}}{(z-1)}dz$$

بفرض $f(z)=\frac{z^2+1}{(z+1)} \Rightarrow f(1)=1$

$$I = \int_{\Gamma} \frac{\frac{z^2+1}{(z+1)}}{(z-1)} dz = 2i\pi f(1) \ = 2\pi i$$

مثال(4): احسب التكامل:

$$I = \int_{\Gamma} \frac{sin\ \pi z^2 + cos\ \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$$

حيث Γ دائرة |z|=3 :

الحل:

النقاط الشاذة $z = 2\ , z = 1$ تقع داخل المنحني Γ

نفرق الكسر:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{Z-2} \quad ; \ A = -1\ , B = 1$$

$$\Rightarrow I = \int_{\Gamma} \frac{sin\ \pi z^2 + cos\ \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$$

$$= \int_{\Gamma} \frac{sin\ \pi z^2 + cos\ \pi z^2}{(z-2)} dz - \int_{\Gamma} \frac{sin\ \pi z^2 + cos\ \pi z^2}{(z-1)} dz$$

بفرض $f(z) = sin\ \pi z^2 + cos\ \pi z^2 \Rightarrow f(2) = 1\ , f(1) = -1$

$$\Rightarrow I = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$$

- **صيغة كوشي الثالثة (المعممة):**

استناداً إلى علاقة كوشي التكاملية يمكننا معرفة صيغة لمشتق التابع في نقطة a أي قيمة $\hat{f}(a)$.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

نشتق بالنسبة لـ a:

$$\hat{f}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \quad , \hat{\hat{f}}(a) = \frac{2}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz \ ,$$

$$\hat{\hat{\hat{f}}}(a) = \frac{3!}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^4} dz$$

ومنه:

$$\boldsymbol{f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \ \Rightarrow \int_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i f^{(n)}(a)}{n!}}$$

مثال(5): احسب التكامل:

$$I = \int_{\Gamma} \frac{sin^2 z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^3} dz$$

حيث C: |z|=1

الحل:

$z = \frac{1}{2}$ مقطة شاذة تقع داخل المنحني المغلقΓ ، نطبق صيغة كوشي المعممة:

$$f(z) = sin^2 z \implies \grave{f}(z) = 2sin\, z \cos z = \sin 2z \implies \grave{\grave{f}}(z) = 2\cos 2z$$

$$I = \int_{\Gamma} \frac{sin^2 z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^3} dz = \frac{2\pi i \grave{\grave{f}}\left(\frac{1}{2}\right)}{2!} = 2\pi i\, cos\ 1$$

مثال(6): احسب التكامل:

$$I = \int_{C} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz$$

حيث C دائرة مركزها a) z=i , b) z=-i ونصف قطرها r=1.

الحل:

(a

$$I = \int_{C} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz = \int_{C} \frac{e^z}{(z - i)(z + i)} dz = \int_{C} \frac{\frac{e^z}{(z + i)}}{(z - i)} dz$$

$$\implies f(z) = \frac{e^z}{(z + i)} \quad , f(i) = \frac{e^i}{2\mathrm{i}}$$

بتطبيق علاقة كوشي التكاملية:

$$\int_{C} \frac{e^z/(z + i)}{(z - i)} dz = 2\pi i f(i) = \pi e^i$$

(b

$$I = \int_{C} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz = \int_{C} \frac{e^z}{(z - i)(z + i)} dz = \int_{C} \frac{\frac{e^z}{(z - i)}}{(z + i)} dz$$

$$\implies f(z) = \frac{e^z}{(z - i)} \quad , f(-i) = \frac{e^{-i}}{-2\mathrm{i}}$$

بتطبيق علاقة كوشي التكاملية:

$$\int_{C} \frac{e^z/(z - i)}{(z + i)} dz = 2\pi i f(-i) = -\pi e^{-i}$$

مثال(7): احسب التكامل:

$$I = \int_{C} \frac{ze^z}{(4z + i\pi)^2} dz$$

حيث C: |z|=1

الحل:

$$I = \int_{C} \frac{ze^z}{(4z + i\pi)^2} dz = \frac{1}{16} \int_{C} \frac{ze^z}{\left(z + \frac{i\pi}{4}\right)^2} dz$$

نطبق صيغة كوشي المعممة:

$$f(z) = ze^z \implies \grave{f}(z) = e^z(1+z) \implies \grave{f}\left(-\frac{i\pi}{4}\right) = \left(1-\frac{i\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} - isin\ \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\int_C \frac{\boldsymbol{f(z)}}{\boldsymbol{(z-a)^{n+1}}}\boldsymbol{dz} = \frac{\boldsymbol{2\pi i f^{(n)}(a)}}{\boldsymbol{n!}}$$

$$\implies \frac{1}{16}\int_C \frac{ze^z}{\left(z+\frac{i\pi}{4}\right)^2}dz = \frac{1}{16}\frac{2\pi i}{1!}\left(1-\frac{i\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} - isin\ \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi(\pi+4i)(1-i)}{32\sqrt{2}}$$

مثال(8): احسب التكامل:

$$I = \int_C \frac{sh\ 2z}{(z-\frac{\pi}{2})^4}dz$$

الحل:

بما أن التابع $f(z) = sh\ 2z$ تحليلي في كل المستوي العقدي والنقطة $z = \frac{\pi}{2}$ نقطة شاذة فإنه بتطبيق علاقة كوشي:

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$\implies \int_C \frac{sh\ 2z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4}dz = \frac{2\pi i f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3!}$$

$$f(z) = sh\ 2z \implies \dddot{f}(z) = 8ch\ 2z$$

$$\implies I = \int_C \frac{sh\ 2z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4}dz = \frac{2\pi i\ (8ch\ \pi)}{3!} = \frac{i8\pi}{3}ch\ \pi$$

مسألة(1): احسب التكامل $\int_C f(z)dz$ في الحالات التالية:

1) $f(z) = \bar{z}$ و C المربع الذي رؤوسه النقاط: $0\ ,\ 2\ ,\ 2+2i\ ,\ 2i$.
2) $f(z) = \bar{z}$ و $C: |z-2| = 3$.

مسألة(2): احسب التكاملات التالية:

1) $\int_C \frac{sin^6 z}{z-\frac{\pi}{6}}dz$; $C: |z| = 1$
2) $\int_C \frac{sin^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3}dz$; $C: |z| = 1$